Système linéaire invariant
Licence GEEA
ULSI 502

6 octobre 2007

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

1 Définition Système Linéaires Invariants

Définitions équivalentes

Equation différentielle On appelle système linéaire invariant, un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Convolueur Un système linéaire invariant est un convolueur et réciproquement.

1.1 Représentation par une équation différentielle

1.1.1 définition

Soit $y(t)$ une fonction du temps, on note :

$$\frac{d^i y(t)}{dt^i} \tag{1}$$

La dérivée n^{ime} de y par rapport au temps t. Un système linéaire est régi par une équation du type :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + .. + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \tag{2}$$

1. n est l'ordre du système.
2. $e(t)$ est l'entrée.
3. $y(t)$ est la sortie
4. a_j et b_k sont des coefficients constants appartenant à R

1.1.2 Solution de l'équation différentielle

Solution du système libre

s(t) est solution du système libre si s(t) vérifie :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = 0 \tag{3}$$

Solution du système forcé

x(t) est solution du système forcée si x(t) vérifie :

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + .. + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \tag{4}$$

Pour une entrée $e(t)$ donnée.

1.1.3 Application de la transformée de Laplace

En appliquant à l'équation différentielle d'ordre n, la transformée de Laplace en considérant les conditions initiales nulles et en appliquant la propriété de dérivation, il vient :

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + ... + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_m p^m E(p) + .. + b_1 E(p) + b_0 E(p) \tag{5}$$

Soit par factorisation :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + .. + b_1 + b_0) E(p) \tag{6}$$

Ou encore :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{b_m p^m + .. + b_1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} \tag{7}$$

$H(p)$ est appelée fonction de transfert entrée-sortie.

1.1.4 Réponse à un dirac

Si $E(p) = 1$ (transformée de Laplace d'un Dirac) alors $S(p) = H(p)$ H(p) est la réponse percutionnelle du système ou encore la réponse à un Dirac.

1.2 Convolueur

1.2.1 Définition

La relation entrée sortie d'un convolueur est la suivante :

$$s(t) = h(t) * e(t) = \int_0^\infty h(\theta) e(t - \theta) d\theta \tag{8}$$

Où l e symbole "$*$" représente le produit dit de convolution.

1.2.2 Application de la transformée de Laplace

$$S(p) = \int \left(\int_0^\infty h(\theta) e(t - \theta) d\theta \right) e^{-pt} dt \tag{9}$$

En inversant l'ordre d'intégration :

$$S(p) = \int_0^{\infty} h(\theta) \left(\int e(t-\theta)e^{-pt}dt \right) d\theta \tag{10}$$

Par changement de variable : $u = t - \theta$

$$S(p) = \int_0^{\infty} h(\theta) \left(\int e(u)e^{-p(u+\theta)}du \right) d\theta \tag{11}$$

Soit encore :

$$S(p) = \int_0^{\infty} h(\theta) \left(\int e(u)e^{-pu}du \right) e^{-p\theta}d\theta \tag{12}$$

L'intégrale au centre est égale à $E(p)$ et il reste une intégrale égale par définition à $H(p)$..Soit $S(p) = H(p)E(p)$

1.3 Propriétés

Des 2 définitions précédentes, on en déduit :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + .. + b_1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} = \int_0^{\infty} h(\theta)e^{-p\theta}d\theta \tag{13}$$

La transformée de Laplace inverse de $H(p)$ est la réponse impulsionnelle (percutionnelle) du système. On remarque que si l'entrée est un Dirac alors l'équation de convolution devient :

$$s(t) = \int_0^{\infty} h(\theta)\delta(t-\theta)d\theta = h(t) \tag{14}$$

D'où on en déduit que le Dirac est l'élément neutre du produit de convolution ce qui se traduit par

$$\int_0^{\infty} h(\theta)\delta(t-\theta)d\theta = h(\theta)_{t-\theta=0} \tag{15}$$

Deuxième propriété : le produit de convolution temporel devient une simple multiplication dans la plan de Laplace.

2 Fonction de transfert

De façon générale, la fonction de transfert d'un système s'écrira :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + .. + b_1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} e^{-p\tau} \tag{16}$$

Où τ est un retard pur. La fonction de transfert s'écrit comme le rapport de deux polynômes :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + .. + b_1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} e^{-p\tau} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{17}$$

2.1 Schéma bloc

On représente un système linéaire par un rectangle et deux flèches : l'une rentrante (entrée) la seconde sortante (sortie). On obtient 2 schémas l'un temporel **??** et le second dans l'espace de Laplace (**??**)

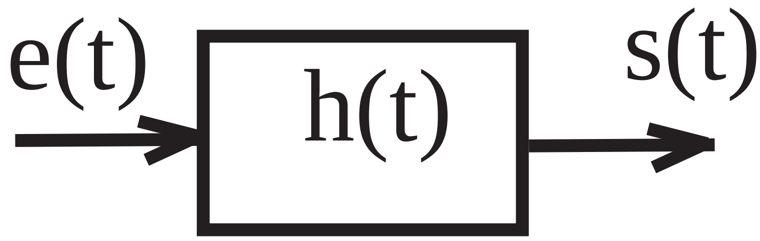

FIG. 1 – Schéma temporel avec $s(t) = h(t) * e(t)$

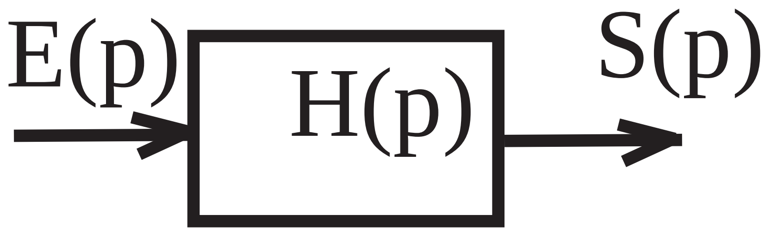

FIG. 2 – Schéma dans l'espace de Laplace avec $S(p) = H(t)E(p)$

2.2 Définitions liées à la fonction de transfert

2.2.1 Pôles

On appelle 'pôles' de la fonction de transfert, les valeurs de $p = p_i$ qui annulent le dénominateur ou encore : $D(p_i) = 0$. $D(p)$ peut se mettre sous la forme dite factorisée :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = \prod_i (p - p_i)^{k_i} \tag{18}$$

k_i est l'ordre du pôle $p_i \in C$ et tel que $\sum k_i = n$

2.2.2 Zéros

On appelle 'zéros' de la fonction de transfert, les valeurs de $p = z_j$ qui annulent le numérateur ou encore : $N(p_i) = 0$. $N(p)$ peut se mettre sous la forme dite factorisée :

$$N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0 = \prod_i (p - z_j)^{k_j} \tag{19}$$

k_j est l'ordre du zéro $z_j \in C$ et tel que $\sum k_j = m$

2.2.3 Classe

Si :

$$D(p) = p^\alpha \prod_i (p - p_i)^{k_i} \tag{20}$$

$p = 0$ est un pôle nul, $alpha$ est la classe du système.

2.2.4 Gain statique

On appelle gain statique du système (s'il existe) la valeur de $H(p=O)$ soit :

$$H(p) = \frac{b_0}{a_0} \tag{21}$$

2.2.5 Gain en vitesse

On appelle gain en vitesse, la valeur de $pH(p)$ pour $p=0$ si elle existe. $pH(p)$ est la dérivée de $h(t)$ soit $h'(t)$

2.2.6 Modes d'un système

$H(p)$ qui est le rapport de 2 polynômes, peut se mettre sous la forme suivante comme nous l'avons vu précédemment :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + .. + b_1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} = \frac{\prod_i (p - z_j)^{k_j}}{\prod_i (p - p_i)^{k_i}} \tag{22}$$

La décomposition en éléments simples (cf. le cours sur la transformée de Laplace), permet de mettre $H(p)$ sous une forme différente. Nous allons traiter ceci par quelques exemples.

- $H(p) = \frac{1}{p(p+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+a}\right)$. En déterminant $h(t)$ par l'inversion de la transformée de Laplace, $h(t)$ est égale à :

$$h(t) = U(t)\frac{1}{a}\left(1 + e^{-at}\right) \tag{23}$$

- $H(p) = \frac{1}{(p+b)(p+a)} = \frac{1}{(a-b)}\left(\frac{1}{p+a} + \frac{1}{p+b}\right)$. En déterminant $h(t)$ par l'inversion de la transformée de Laplace, $h(t)$ est égale à :

$$h(t) = U(t)\frac{1}{b-a)}\left(e^{-at}e^{-bt}\right) \tag{24}$$

- $H(p) = \frac{1}{p^2 + 2mw_0 p + w_0^2}$. En déterminant $h(t)$ par l'inversion de la transformée de Laplace, $h(t)$ est égale à :

$$h(t) = U(t)e^{-mw_o t}\frac{w_0}{\sqrt{1-m^2}}sin(\sqrt{1-m^2}w_0 t) \tag{25}$$

Au travers de ces quelques exemples, on s'aperçoit que les éléments simples sont définis à partir des pôles de $H(p)$ et en appliquant la transformée de Laplace inverse, ces éléments simples fournissent ce que l'on appelle les modes du système.

3 Système bouclé

3.1 Schéma

Un système bouclé est représenté sur la figure **??**. Ce schéma sera réduit en les éléments de la figure **??**.

Sur le schéma de la figure **??**, on désigne :
- L'entrée de référence
- le retour fourni par le capteur
- le correcteur fournissant la commande au système

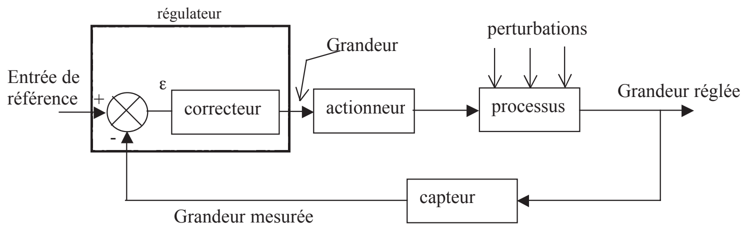

FIG. 3 – Schéma boucle fermée

- l'actionneur (un pré-ampli en général)
- le processus qui subit des perturbations
- La grandeur à régler

3.2 Equation sans perturbation

3.2.1 Schéma

Le schéma précédent se réduit en l'absence des perturbations en :
- L'entrée de référence ou consigne $E(p)$
- Le retour fourni par le capteur
- La fonction de transfert directe, dite en boucle ouverte
- La sortie $S(p)$
- La fonction de transfert de retour K

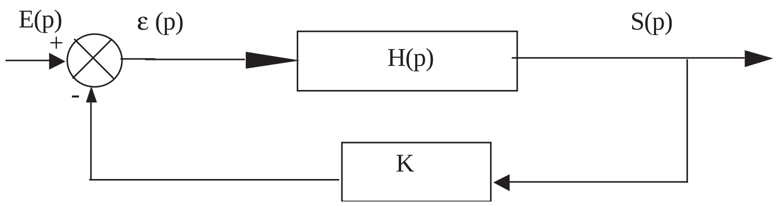

FIG. 4 – Schéma boucle fermée

3.2.2 Equation de transfert

- $S(p) = H(p)\epsilon(p)$
- $\epsilon(p) = E(p) - KS(p)$
- Soit $S(p) = H(p)(E(p) - KS(p))$ ou encore
- $S(p) + H(p)KS(p) = H(p)E(p)$

On obtient l'équation de transfert entrée / sortie

$$S(p) = \frac{H(p)}{1 + KH(p)}E(p) = H_{BF}(p)E(p) \tag{26}$$

3.2.3 Erreur

- $S(p) = H(p)\epsilon(p)$
- $\epsilon(p) = E(p) - KS(p)$
- Soit $\epsilon(p) = E(p) - KH(p)\epsilon(p)$ ou encore
- $\epsilon(p) + KH(p)\epsilon(p) = E(p)$

On obtient l'équation liant l'erreur à l'entrée

$$\epsilon(p) = \frac{1}{1 + KH(p)} E(p) = F(p)E(p) \tag{27}$$

3.3 Equation avec perturbation

3.3.1 Schéma

Le principe de superposition permet d'effectuer les calculs en l'absence d'entrée aussi, le schéma se réduit en :

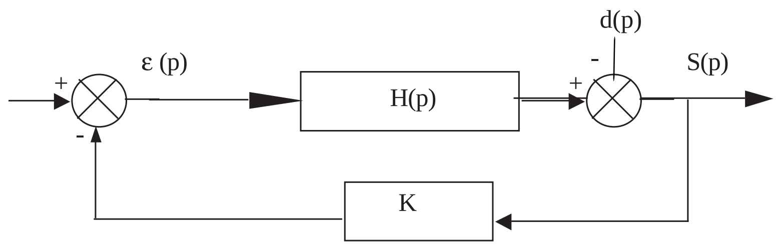

FIG. 5 – Schéma boucle fermée

3.3.2 Equation perturbation sortie

- $S(p) = H(p)\epsilon(p) - d(p)$
- $\epsilon(p) = -KS(p)$
- Soit $S(p) = H(p)KS(p) - d(p)$ ou encore
- $S(p) + H(p)KS(p) = -d(p)$

On obtient l'équation de transfert entrée / sortie

$$S(p) = \frac{-d(p)}{1 + KH(p)} \tag{28}$$

3.3.3 Erreur

- $\epsilon(p) = -KS(p)$
- Soit $\epsilon(p) = E(p) - KH(p)\epsilon(p)$ ou encore

On obtient l'équation liant l'erreur à l'entrée

$$\epsilon(p) = \frac{-K}{1+KH(p)} d(p) \tag{29}$$

3.4 Equations avec perturbation et consigne

Le principe de superposition permet d'écrire directement

$$S(p) = \frac{H(p)}{1+KH(p)} E(p) + \frac{-d(p)}{1+KH(p)} \tag{30}$$

L'erreur s'écrit :

$$\epsilon(p) = \frac{1}{1+KH(p)} E(p) + \frac{-K}{1+KH(p)} d(p) \tag{31}$$

Il est important de remarquer que dans chaque équation, le terme au dénominateur $1 + KH(p)$ est le même.

4 Définition des erreurs

L'erreur dépend de l'entrée, on a défini trois erreurs :
- L'erreur de position pour une entrée échelon.
- L'erreur de vitesse ou de traînage pour une entrée rampe.
- L'erreur d'accélération pour une entrée en t^2.

Pour calculer le régime final de l'erreur, on utilise le théorème de la valeur finale.